ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2016–2017 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 11 КЛАСС
Задания, ответы и критерии оценивания

1. (7 баллов) Во время распродажи Пётр купил брюки с 40 %-ной скидкой и рубашку с 20 %-ной скидкой. На следующий день Иван купил такие же брюки и рубашку без скидок. Мог ли Иван заплатить в полтора раза больше, чем Пётр? Ответ обоснуйте.

Ответ. Мог.

Решение. Пусть брюки без скидки стоят x рублей, а рубашка без скидки стоит y рублей. Тогда Пётр заплатил $0{,}6x + 0{,}8y$ рублей, а Иван $x + y$ рублей. Получаем уравнение $1{,}5\cdot(0{,}6x + 0{,}8y) = x + y$, откуда $x = 2y$. Таким образом, если брюки стоят в два раза больше рубашки, то Иван заплатил в полтора раза больше Петра.

Полным решением является также предъявление конкретной цены брюк и рубашки (например, 2000 руб. и 1000 руб.) с обоснованием того, что при такой цене условие задачи выполнено (в данном случае Пётр заплатил 2000 руб., а Иван — 3000 руб.).

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Приведён верный пример возможной цены брюк и рубашки, но обоснование отсутствует — 4 балла.
- Верно составлено уравнение $1{,}5\cdot(0{,}6x + 0{,}8y) = x + y$, но дальнейших продвижений нет (или они ошибочны) — 2 балла.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

2. (7 баллов) Приведите пример числа x, для которого выполняется равенство $\sin 2017x - \operatorname{tg} 2016x = \cos 2015x$. Ответ обоснуйте.

Ответ. Например, $\frac{\pi}{4}$.

Решение. Так как $\frac{2016\pi}{4} = 504\pi = 252\cdot 2\pi$ кратно периоду, имеем

$$\sin\frac{2017\pi}{4} = \sin(252\cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{2015\pi}{4} = \cos(252\cdot 2\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

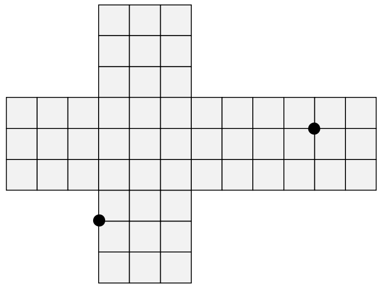
$$\operatorname{tg}\frac{2016\pi}{4} = \operatorname{tg}(252\cdot 2\pi) = \operatorname{tg}0 = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Критерии проверки.

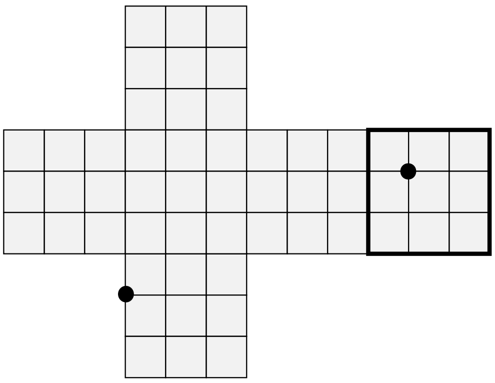
- Приведён верный ответ, и показано, что при этом значении x равенство верно, — 7 баллов.
- Приведён только верный ответ — 3 балла.

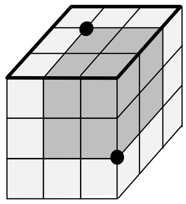
3. (7 баллов) Рубик сделал развертку куба размером $3 \times 3 \times 3$ и отметил на ней две точки – см. рисунок. Каково будет расстояние между этими точками после того, как Рубик склеит из развёртки куб?



Ответ. $2\sqrt{3}$.

Решение. Изобразим готовый кубик (изображение выбрано так, чтобы выделенная грань развёртки оказалась сверху). Данные точки — это две противоположные вершины кубика $2 \times 2 \times 2$. А в кубе $2 \times 2 \times 2$ диагональ имеет длину $2\sqrt{3}$.





Замечание. Не обязательно использовать то, что точки являются концами диагонали куба. Можно просто изобразить получившуюся картинку и найти длину требуемого отрезка, применив пару раз теорему Пифагора (или методом координат и т. п.)

Критерии проверки.

- Верное решение (достаточно верной картинки и объяснения, как именно ищется расстояние между точками) — 7 баллов.
- Картинка изображена верно (возможно не с того ракурса, что в приведённом решении), но дальше расстояние найдено неверно — 3 балла.
- Приведён только верный ответ — 0 баллов.
- Допущена ошибка при определении местонахождения точек на кубе — 0 баллов.

4. (7 баллов) Существуют ли такие три действительных числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он будет иметь два различных положительных корня, а если в другом порядке, то два различных отрицательных корня?

Ответ. Нет.

Решение. Пусть у трёхчлена ax^2+bx+c два отрицательных корня x_1 и x_2. Тогда $b/a = -(x_1+x_2) > 0$ и $c/a = x_1x_2 > 0$, то есть числа b и c того же знака, что и число a. Допустим, как-то переставив коэффициенты, мы получили уравнение с двумя положительными корнями. Но тогда частное от деления коэффициента при x на коэффициент при x^2 должно было бы стать отрицательным, а частное от деления двух чисел одного знака положительно. Противоречие.

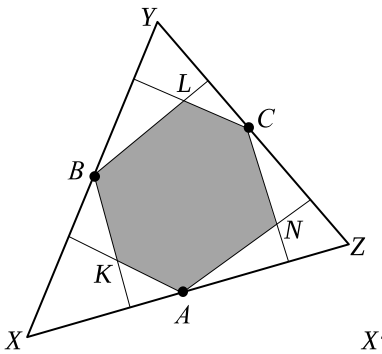
Критерии проверки.

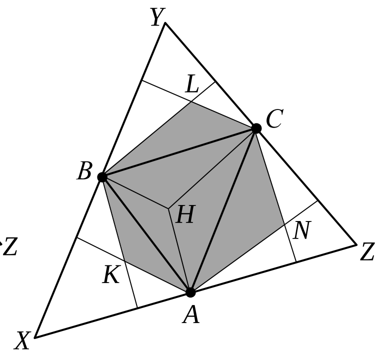
- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Решение, основанное на неполном переборе возможных знаков коэффициентов, — 2 балла.
- Приведено несколько конкретных числовых примеров коэффициентов, и сделан правильный вывод — 1 балл.
- Ответ «нет» без обоснования — 0 баллов.

5. (7 баллов) Из середины каждой стороны остроугольного треугольника площади S проведены перпендикуляры к двум другим сторонам. Найдите площадь шестиугольника, ограниченного этими перпендикулярами.

Ответ: $\dfrac{S}{2}$.

Решение.





1. Обозначим вершины исходного треугольника буквами X, Y, Z, середины сторон — буквами A, B, C, точки пересечения перпендикуляров — K, L, N. Площадь искомого шестиугольника равна сумме площадей треугольника ABC и трёх маленьких треугольников, примыкающих к его сторонам: AKB, BLC, CNA.

2. Так как средние линии треугольника XYZ разбивают его на 4 равных треугольника, площадь треугольника ABC равна $\dfrac{S}{4}$.

3. Проведём в треугольнике ABC отрезки высот до точки их пересечения H. Так как средняя линия BA параллельна стороне YZ, проведённые к ним перпендикуляры CH и AN также параллельны. Рассуждая аналогично, получаем, что $AH||CN$, и, значит, $AHCN$ — параллелограмм.
4. Диагональ AC разбивает параллелограмм $AHCN$ на два равных треугольника, следовательно, площади треугольников AHC и ANC равны. Точно так же равны площади треугольников AHB и AKB и площади треугольников CHB и CLB.
5. Отсюда получаем, что искомая площадь в два раза больше площади треугольника ABC и равна $\frac{S}{2}$.

Замечание. Исходный треугольник должен быть остроугольным, чтобы все высоты проходили внутри соответствующих треугольников.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Равенство всех нужных фигур (и площадей) доказано, но площадь не найдена — 4 балла.
- Приведено верное разбиение шестиугольника на части, но равенство фигур никак не обосновывается, а только утверждается, и получен верный ответ — 3 балла.
- Ответ $\frac{S}{2}$ без обоснования — 1 балл.

6. (7 баллов) Если на доске записано число A, к нему можно прибавить любой его делитель, отличный от 1 и самого A. Можно ли из $A = 4$ получить 1234321?

Ответ. Можно.

Решение. Прибавить к числу его делитель n — это значит к числу вида kn добавить n. Получится число вида $(k+1)n$. Заметим, что число 1234321 делится на 11. Тогда к числу $A = 4 = 2\cdot 2$ будем добавлять 2 до тех пор, пока не получим число $2 \cdot 11$: $2 \cdot 2 \to 2 \cdot 3 \to 2 \cdot 4 \to 2 \cdot 5 \to \ldots \to 2 \cdot 11$. А затем будем добавлять 11:

$$2 \cdot 11 \to 3 \cdot 11 \to 4 \cdot 11 \to 5 \cdot 11 \to \ldots \to 112211 \cdot 11 = 1234321.$$

Критерии проверки.

- Любой верный алгоритм получения числа — 7 баллов.
- Есть идея, как получить число, кратное собственному делителю числа 1234321, — 3 балла.
- Ответ «да» без обоснования — 0 баллов.

Максимальный балл за все выполненные задания — 42.